編 者 的 話

本期專訪 Andrei Okounkov 教授。Okounkov 最初的研究領域是群表現理論, 側重組合和漸近面向。以此爲起點, 他在複、實代數幾何、統計力學、動力學系統、概率論及拓樸弦論等領域, 取得了驚人成果。他的研究植根於極爲基本的概念, 譬如分割 (partition), 這是表現理論核心的基本組合概念。他的核心想法是: 就自然的機率測度而言, 分割和其他表現論的概念應該被視爲隨機物件。他將此想法與幾何、化學、高能物理結合, 應用於諸多領域。

Okounkov 和合作者的諸多結果是以 Gromov-Witten (GW) 不變量理論爲背景。GW 不變量是源於計數幾何 (enumerative geometry) 的經典問題, 例如: 平面一般位置上, 經過 $3d-1$ 個點的 d 次的有理曲線的數目是多少? 八十年代末, 弦理論學者藉由曲線數的生成函數所遵循的微分方程, 以冪級數求解這些方程, 得到曲線數目的遞歸關係。

一般來說, GW 理論探索曲線到複流形的映射在模空間的交點數目。設 V 是複非奇異投影多樣體。在一系列論文中, Okounkov 和 Pandharipande 對曲線的 GW 不變量做了詳盡的描述。他們證明: $V=\mathbb{P}^1$ 的生成函數是 Todd 階序的 tau 函數, 且 $V=\mathbb{P}^1$ 時 GW 不變量出乎意料地簡單, 比 V 爲點時的 GW 不變量更爲基本, 因爲後者可藉由取極限而獲得。箇中關鍵因素是 Gromov-Witten/Hurwitz 對應關係; 該關係聯繫起曲線 V 的 GW 不變量與 Hurwitz 數, 其中的 Hurwitz 數是: 在給定點上, 給定分歧 (ramification) 類型的分歧覆蓋 (branched covering) 數。

其後, Maulik, Nekrasov, Okounkov 及 Pandharipande 的論文推測: 對於特定類別的形狀, Gromov-Witten 計數恰好對應於所謂的 Donaldson-Thomas 理論 (該理論對曲線有迴異的理解)。在此對應關係, 某類型的隨機曲面至爲關鍵。

橢圓曲線上的點滿足某二元三次方程, 形如 $y^2=x^3+1$。陳榮凱教授介紹橢圓曲線的代數結構, 概述 Mordell-Weil 定理。之後爲了在複數平面的商群上描繪出三次曲線的樣貌, 他考慮亞純函數, 介紹亞純雙周期函數 Weierstrass P-function $\wp(z)$; $\wp$ 函數及其導數可用於參數化橢圓曲線, 並可對給定整數格子點生成週期橢圓函數體。最後他概述橢圓曲線的密碼學, 其安全性植基於所謂的 Discrete logarithm problem (DLP) 的難解性; 該問題考慮在有限體上的橢圓曲線, 在給定 P, Q 且已知 $Q=mP$ 時試圖求出 m。

本期刊登 2024 歐洲女子數學奧林匹亞、國際數學奧林匹亞競賽試題解答。值得一提的是, Google 的 DeepMind 打造的 AI 系統 AlphaGeometry 2, 費時 19秒, 解出了國際奧林匹亞競賽的幾何題 (第四題), 而該公司另一 AI 系統 AlphaProof, 費了 72 小時, 解出兩道代數題 (第一題、第六題) 及一道數論題 (第二題)。

數學傳播電子版網址:

https://www.math.sinica.edu.tw/mathmedia

梁惠禎
2024 年 9 月

數學傳播 191 第四十八卷 第三期

目錄

有朋自遠方來——
專訪 Andrei Okounkov 教授 3

橢圓曲線上的代數、幾何以及應用 .... 陳榮凱 20

廣義閔可夫斯基不等式的介紹及推廣 ..... 林福林 · 林子喬 24

用對偶觀點深入了解幾何圖形的關係 ..... 林永發 · 譚克平 36

2024 年第 13 屆歐洲女子數學奧林匹亞競賽試題解答 .....
教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組 48

2024 年第 65 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答 ....
教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組 59

平面中直線循環的矩陣變換 .... 趙湞揚 · 龔書宏 68

拉瑪奴姜問題 524 的證明 .... 李維昌 87

一道幾何趣題的探討及其推廣 .... 孫志躍 · 林開亮 92

直三稜柱截面與底面夾角公式的相對性推廣 ...... 陳 都 104